Solution des exercices 4.1 à 4.20 :	حلول التمارين من 1.4 إلى 20.4

Exercice 4.1 :

En admettant qu'une partie de l'éclair est rectiligne, on peut utiliser la loi :

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}} \to B=\frac{4\pi 10^{-7}\times 20.10^{3}}{2\pi\times 1} \Rightarrow \boxed{B=4.10^{-3}T}$$

Cette valeur est pour la distance de un mètre de l'éclair, mais à la distance de $300m$ le résultat est :

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}} \to B=\frac{4\pi 10^{-7}\times 20.10^{3}}{2\pi\times 300} \Rightarrow \boxed{B=1,33.10^{-5}T}$$

Exercice 4.2 :

D'après la règle de la main droite : si le courant circule vers l'ouest, le vecteur du champ magnétique produit par ce courant est dirigé vers le sud.

Pour un courant rectiligne, l'intensité du champ magnétique est obtenue par l'application de la loi :

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}} \to B=\frac{4\pi 10^{-7}\times 300}{2\pi\times 12} \Rightarrow \boxed{B=5.10^{-6}T}$$

Comparons le au champ magnétique terrestre $\vec{B}_0$:

$$\frac{B}{B_0}=\frac{5.10^{-6}}{5.10^{-5}}=10^{-1} \Rightarrow \boxed{\frac{B}{B_0}=10^{-1}}$$

Le champ produit par la ligne électrique ne représente que 10% du champ magnétique terrestre

Exercice 4.3 :

Le champ magnétique produit par un courant rectiligne d'intensité I situé à une distance du conducteur est donné par la loi :

$$B=\mu_0\frac{I}{2\pi}$$

La direction du champ magnétique est déterminée par la règle de la main droite.

Le courant d'intensité $1A$ crée un champ magnétique perpendiculaire au plan des deux conducteurs (entrant dans la feuille) :

$$B_1=4\pi.10^{-7}\frac{1}{2\pi\times 1}\to B_1=2.10^{-7}T$$

Le courant d'intensité $3A$ crée un champ magnétique perpendiculaire au plan des deux conducteurs (entrant dans la feuille) :

$$B_2=4\pi.10^{-7}\frac{3}{2\pi\times 2}\to B_2=3.10^{-7}T$$

Le champ magnétique total est égal à la somme des champs $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$. Puisque les deux champs ont même direction et même sens, le champ magnétique résultant est perpendiculaire au plan des deux conducteurs et d'intensité :

$$B=B_2+B_1\to B=5.10^{-7}T$$

Exercice 4.4 :

1/ D'après la loi de Biot et Savard, le champ magnétique élémentaire $d\vec{B}$ produit par une longueur élémentaire dl de la spire parcourue par un courant électrique d'intensité I est :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\vec{dl} \wedge \vec{u}$$

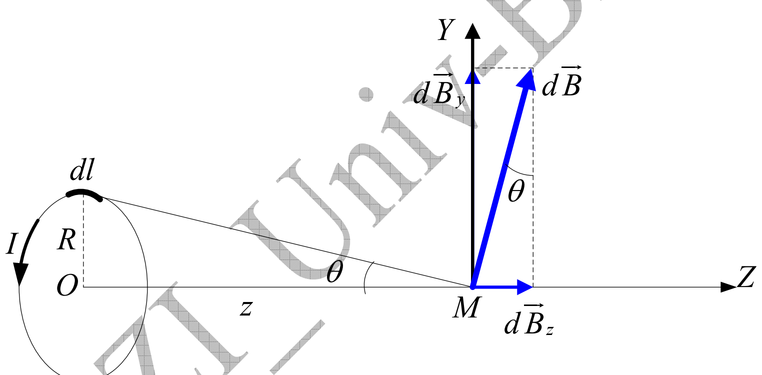
Puisque $\vec{u}_r = -$, on peut écrire la loi sous la forme :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}\vec{dl} \wedge \vec{r}$$

On remarque que $\vec{dl} \perp \vec{r}$, ce qui implique $\left|\vec{dl} \wedge \vec{r}\right| = dl.r$, d'où :

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl$$

On peut décomposer $d\vec{B}$ en deux composantes $d\vec{B}_z$ et $d\vec{B}_y$, de telle façon que lors de l'intégration , toutes les composantes $d\vec{B}_y$ s'annulent deux à deux en raison de la symétrie. Le champ total est la résultante de toutes les composantes $d\vec{B}_z$, et donc $\vec{B}_z$ résultant est parallèle à l'axe OZ .



Par projection (voir figure), on obtient : $dB_z = dB.\sin\theta \rightarrow dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\sin\theta dl$

Pour trouver B_z, on intègre l'expression précédente par rapport à la seul variable l, pour arriver à :

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\sin\theta \oint dl$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\sin\theta . 2\pi R \Rightarrow B_z = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R}{r^2}\sin\theta$$

Puisque $\sin\theta = \frac{R}{r}$, on peut donc obtenir l'expression finale du champ :

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2R}\frac{R^2}{r^2}\sin\theta \Rightarrow \boxed{B_z = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\theta \Leftrightarrow \vec{B}_z = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\theta . \vec{u}_z}$$

2/ En remplaçant cette fois $\sin\theta$ par $\frac{R}{r} = \frac{R}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}}$, on obtient l'expression proposée :

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

3/ La forme approximative de cette expression à de grandes distances de l'axe OZ, est obtenue en négligeant le rayon de la spire devant la grande distance z, le résultat est :

$$\boxed{B_z \approx \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{z^3}}$$

4/ Expression de B_z en fonction du moment magnétique M :

$$\left.\begin{array}{l} M = IS \\ S = \pi R^2 \end{array}\right| \rightarrow M = I\pi R^2$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{I\pi R^2}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} \Rightarrow \boxed{B_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{M}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}}$$

5/ On obtient le champ magnétique produit au centre de la spire en prenant $z = 0$:

$$\boxed{B_o = \frac{\mu_0 I}{2R}}$$

Exercice 4.5 :

1/ Le champ magnétique produit par un conducteur rectiligne situé à une distance d est $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{d}$.

Le champ magnétique produit au point M (figure (a)) est égal à la résultante des deux champs magnétiques créés par les deux conducteurs rectilignes : $\vec{B}_M = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$

D'après la règle de la main droite, $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ sont de sens contraires : $B_M = B_2 - B_1$

$$B_M = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_2}{d/2} - \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{d/2} \Rightarrow \boxed{B_M = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{d/2}\left(I_2 - I_1\right)} \rightarrow \boxed{B_M = 1,2.10^{-4} T}$$

L'annulation de $\vec{B}$, veut dire que $\vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \vec{0}$. Cette condition ne peut être satisfaite à l'extérieur de l'espace compris entre les deux conducteurs, car $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ ont même sens, et par conséquent $B_0 = B_2 + B_1 \neq 0$. Donc, la droite (Δ) où $B = 0$ se situe entre les deux conducteurs tel que $B_0 = B_2 - B_1 = 0$. Au vu de la figure (b), on a :

$$B_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_2}{d - x} - \frac{\mu}{2\pi} \frac{I_1}{x} = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{I_1}{I_2 - I_1} d} \rightarrow \boxed{x = \frac{d}{3}}$$

(a) (b) (c)

2/ Dans ce cas $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ ont même sens : $B_P = B_2 + B_1$

D'après la figure (a), mais en intervertissant le sens de I_1, on aura :

$$B_M = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2}{d/2} + \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{d/2} \Rightarrow \boxed{B_M = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{1}{d/2}\left(I_2 + I_1\right)} \rightarrow \boxed{B_M = 2.10^{-4}T}$$

Il est impossible pour que le champ magnétique entre les deux conducteurs s'annule, car $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ ont même sens. Donc, le point P est situé à l'extérieur des deux conducteurs $B_P = B_2 + B_1 \neq 0$. La droite où $B_P = 0$ est située obligatoirement à l'extérieur des deux conducteurs tel que $B_P = B_2 - B_1 = 0 \Leftrightarrow B_2 = B_1$. De ce fait, et au vu de la figure (c), on aura :

$$B_P = \frac{\mu}{2\pi}\frac{I_2}{d+x} - \frac{\mu}{2\pi}\frac{I_1}{x} = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{I_1}{I_2 + I_1}d} \rightarrow \boxed{x = \frac{d}{5}}$$

Exercice 4.6 :

On sait qu'une charge qui se déplace dans un champ magnétique est soumise à une force magnétique $\vec{F} = q\vec{v}_0 \wedge \vec{B}$, telle que son intensité soit égale à $F = qv_0 B\sin\alpha$, avec $\alpha = \left(\vec{v}_0, \vec{B}\right)$.

La particule chargée est soumise à deux forces : la force magnétique $\vec{F}$ et son poids $\vec{P} = m\vec{g}$. Pour que sa trajectoire reste horizontale, il faut que les deux forces soient directement opposées $\vec{F} = -\vec{P}$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{B} \perp \vec{v}_0 \Rightarrow \sin\alpha = 1 \Rightarrow F = qv_0 B \\ P = mg \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{B = \frac{mg}{qv_0}}$$

Application numérique :

$$B = \frac{5.10^{-4} \times 9,8}{2,5.10^{-8} \times 6.10^{4}} \rightarrow \boxed{B \approx 3,27T}$$

Quant à la direction de $\vec{B}$, elle est horizontale et perpendiculaire au plan vertical formé par la vitesse $\vec{v}_0$ et la force $\vec{F}$.

$\vec{v}_0$ est horizontale, et a pour direction l'axe $x'x$,

$\vec{F}$ est verticale et a pour direction l'axe $z'z$,

$\vec{B}$ est horizontale et a pour direction l'axe $y'y$.

Exercice 4.7 :

1/ On a vu en cours, et dans un exercice précédent que le vecteur champ magnétique produit par une spire circulaire (de rayon R et parcourue par un courant d'intensité I) en un point de son axe est donné par l'expression :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{2R}\sin^3\theta.\vec{u}_x$$

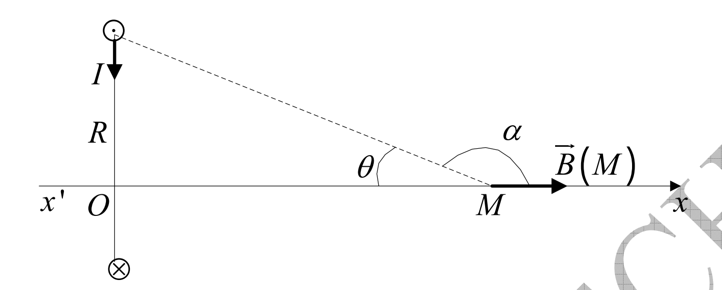
La circulation du vecteur $\vec{B}$ sur l'axe $(x'Ox)$ est égale à :

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} B(x)\,dx$$

Sachant que $x = -\dfrac{R}{\tan\alpha} \Rightarrow dx = \dfrac{R}{\sin^2\alpha}dx$, et puisque $\alpha + \theta = 180°$, on a $\sin\theta = \sin\alpha$.

D'où :

$$C = \int_0^{\pi} \frac{\mu_0}{2R}\frac{\sin^3\alpha}{\sin^2\alpha}R d\alpha \Rightarrow \boxed{C = \mu_0 I}$$



2/ Le conducteur solénoïdal est constitué de N spires circulaires, pour obtenir la circulation du champ, il suffit de multiplier le résultat précédent par N, on trouve :

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} B(x)\,dx = \boxed{C = N\mu_0 I}$$

Exercice 4.8 :

1/ L'ion de charge q, en passant de O' à O sous l'action de la tension U reçoit le travail : $W = qU$

On applique le théorème de l'énergie cinétique pour calculer la vitesse finale avec laquelle l'ion arrive en O :

$$\frac{1}{2}mv^2 = qU \Rightarrow v = \sqrt{2\frac{q}{m}U}$$

La vitesse des ions ${}^7_3Li^+$ est :

$$\boxed{v_1 = \sqrt{2\frac{q}{m_1}U}}$$

La vitesse des ions ${}^6_3Li^+$ est :

$$\boxed{v_1 = \sqrt{2\frac{q}{m_2}U}}$$

2/ L'ion se déplace à l'intérieur de la chambre de séparation à la vitesse $\vec{v}$, il est soumis à la force magnétique $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

On a les grandeurs vectorielles suivantes :

$$\vec{a}\begin{cases}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{cases} \quad , \quad \vec{v}\begin{cases}v\\ 0\\ 0\end{cases} \quad , \quad \vec{B}\begin{cases}0\\ B\\ 0\end{cases}$$

Ecrivons à présent l'accélération du mouvement :

$$\begin{cases}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{cases} = \frac{q}{m}\begin{cases}v\\0\\0\end{cases} \wedge \begin{cases}0\\B\\0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{cases} = \begin{cases}0\\0\\ \dfrac{q}{m}vB\end{cases}$$

D'après les données, ces résultats nous indiquent que :

$$\ddot{x} = a_x = 0 \Leftrightarrow \dot{x} = v_x = C^{te}$$
$$\ddot{y} = a_y = 0 \Leftrightarrow \dot{y} = v_y = 0$$
$$\ddot{z} = a_z = \frac{q}{m}vB \Leftrightarrow \dot{z} = v_z = 0$$

On remarque que l'accélération est portée par l'axe Oz, ce qui veut dire que la force magnétique qui agit sur la charge est perpendiculaire au plan xOy, donc perpendiculaire à la vitesse $\vec{v}$ et à la trajectoire. Les ions restent dans le plan xOz au cours de leur mouvement dans le champ magnétique. L'accélération est donc normale.

Dans le repère de Frenet $\left(O,\vec{N},\vec{T}\right)$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_N + \vec{a}_T \rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}$$

Puisque la vitesse est constante, la composante tangentielle de l'accélération est nulle.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}_T = \dfrac{dv}{dt}\vec{T} = \vec{0}\\ \vec{v} = \overrightarrow{C^{te}}\end{array}\right| \Rightarrow \text{le mouvement est uniforme}$$

L'accélération est normale, d'où :

$$\vec{a} = \vec{a}_N = \frac{v^2}{R}\vec{N} \rightarrow a_N = \frac{v^2}{R} = v\frac{e}{m}B$$

Le rayon de courbure est constant, d'où:

$$R = \frac{mv}{eB} = C^{te} \Rightarrow \text{ le mouvement est circulaire}$$

En conclusion le mouvement est circulaire uniforme.

En reportant l'expression de la vitesse trouvée précédemment dans l'expression de R, on trouve :

$$R_1 = \frac{m_1}{qB}v_1 \Rightarrow \boxed{R_1 = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_1U}{q}}} \rightarrow \boxed{OC_1 = 2R_1 \approx 4,8cm}$$

$$R_2 = \frac{m_2}{qB}v_2 \Rightarrow \boxed{R_2 = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_2U}{q}}} \rightarrow \boxed{OC_2 = 2R_2 \approx 4,5cm}$$

<u>Exercice 4.9</u> :

On néglige dans cette solution le poids des particules devant les autres forces.

1/ <u>Déviation produite par le champ électrique seul</u> :

<u>Equation de la trajectoire</u> :

Suivant l'axe Ox, la seule force qui agit sur le faisceau d'ions est la force électrique $\vec{F} = qE.\vec{u}_x$. Appliquons le principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a}_x = qE.\vec{u}_x \Rightarrow a_x = \frac{q}{m}E$$

Le condensateur étant plan, donc $E = \frac{U}{h}$, d'où :

$$a_x = \frac{qU}{mh}$$

L'accélération suivant l'axe Ox étant constante, le mouvement est rectiligne uniformément accéléré dont l'équation horaire est :

$$x = \frac{1}{2}a_x t^2 \rightarrow x = \frac{1}{2}\frac{qU}{mh}t^2$$

Suivant l'axe Oy, aucune force n'agit sur le faisceau qui se déplace à vitesse constante $\vec{v} = \vec{v}_y = v_y\vec{u}_y$. Le mouvement est donc rectiligne uniforme d'équation horaire :

$$y = v_0 t \Rightarrow t = \frac{y}{v_0}$$

La déviation finale marquée sur l'écran, à la sortie du faisceau du condensateur (où $y = L$), après la durée $\Delta t = \frac{L}{v_0}$ est :

$$\boxed{x = \frac{1}{2}\frac{qU}{mh}\left(\frac{L}{v_0}\right)^2 = \Delta x} \rightarrow (1)$$

2/ Déviation produite par le champ magnétique seul :

Equation de la trajectoire :

Suivant l'axe Oz, la seule force agissant sur le faisceau d'ions est la force magnétique perpendiculaire à l'axe Ox qui porte le vecteur du champ magnétique :

$$\vec{F} = q\vec{v}_0 \wedge \vec{B}$$

Le principe fondamental de la dynamique nous permet d'écrire :

$$m\vec{a}_z = \frac{q}{m}v_0.\vec{u}_y \wedge -B.\vec{u}_x \Rightarrow \vec{a}_z = \frac{q}{m}v_0 B.\vec{u}_z$$

$$a_z = \frac{q}{m}v_0 B$$

L'accélération est constante suivant l'axe Oz. Le mouvement est donc rectiligne uniformément varié d'équation horaire :

$$z = \frac{1}{2}a_z t^2 \rightarrow z = \frac{1}{2}\frac{q}{m}v_0 B.t^2$$

Suivant l'axe Oy aucune force n'agit sur le faisceau d'ions qui chemine avec une vitesse constante $\vec{v} = \vec{v}_y = v_y\vec{u}_y$: le mouvement est rectiligne uniforme d'équation horaire :

$$y = v_0 t \Rightarrow t = \frac{y}{v_0}$$

La déviation finale indiquée sur l'écran à la sortie du faisceau du condensateur (où $y = L$) après le temps $\Delta t = \frac{L}{v_0}$ est :

$$\Delta z = \frac{1}{2}\frac{q}{m}Bv_0\left(\frac{L}{v_0}\right)^2 \Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{2}\frac{q}{m}B\frac{L^2}{v_0} = \Delta z} \rightarrow (2)$$

3/ La marque laissée par le faisceau sur l'écran est déviée suivant l'axe Oz (c'est-à-dire dans le plan du mouvement initial), tandis que dans le premier cas la marque est déviée perpendiculairement à ce plan.

La déviation totale produite est égale à la composition des deux déviations produites par les champs électrique et magnétique. En éliminant la vitesse entre les équations (1) et (2), on obtient la valeur de cette déviation :

$$v_0 = \frac{1}{2}\frac{q}{m}B\frac{L^2}{z} \Rightarrow \boxed{x = 2\frac{m}{q}\frac{U}{h}\frac{1}{B^2L^2}z^2}$$

Remarquons que l'expression est indépendante de la vitesse initiale.

4/ Cette expérience permet le calcul de la charge massique $\frac{q}{m}$ des ions qui constituent le faisceau dévié. En effet les grandeurs U, B, L, h sont connues d'avance et il ne reste plus qu'à déduire le rapport entre la masse de l'ion et sa charge.

Historiquement : Par sa célèbre expérience, R.A. Millikan a pu calculer la charge de l'électron grâce au résultat auquel est parvenu, bien avant lui, J.J Thomson qui a calculé justement la charge massique $\frac{q}{m}$. Il ne restait plus qu'à déduire la masse de l'électron.

Exercice 4.10 :

1/ Chaque électron du faisceau, à son entrée dans le champ magnétique, est soumis à une force magnétique :

$$\vec{F} = q\vec{v}_0 \wedge \vec{B}$$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a} = -ev_0.\vec{u}_x \wedge B.\vec{u}_z \rightarrow \vec{a} = \frac{e}{m}v_0B.\vec{u}_y \Rightarrow \vec{a} = a.\vec{u}_y \Leftrightarrow \vec{F} = F.\vec{u}_y$$

La force magnétique à laquelle est soumis l'électron est perpendiculaire à $\vec{v}_0$ (c'est-à-dire à la trajectoire) et à $\vec{B}$. On va étudier le mouvement dans le repère de Frenet $(O,\vec{N},\vec{T})$. l'accélération s'écrit :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_N + \vec{a}_T \rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}$$

Puisque la vitesse est constante, la composante tangentielle de l'accélération est donc nulle, d'où :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}_T = \frac{dv}{dt}\vec{T} = \vec{0}\\ \vec{v} = \vec{v}_0 = \overrightarrow{C^{te}}\end{array}\right| \Rightarrow \text{le mouvement est uniforme}$$

L'accélération normale a pour expression :

$$\vec{a} = \vec{a}_N = \frac{v^2}{R}\vec{N} \rightarrow a_N = \frac{v_0^2}{R} = v_0 \frac{e}{m} B$$

Le rayon de courbure est constant, donc :

$$R = \frac{mv_0}{eB} = C^{te} \Rightarrow \text{le mouvement est circulaire}$$

En conclusion, dan le champ magnétique le mouvement du faisceau d'électrons est circulaire uniforme. La trajectoire dans le condensateur est un arc de cercle de rayon R. Voir figure ci-dessous.

2/ l'angle de déviation α est égal à l'angle au centre de l'arc $\widehat{OA}$ (voir figure ci-dessous), et par conséquent :

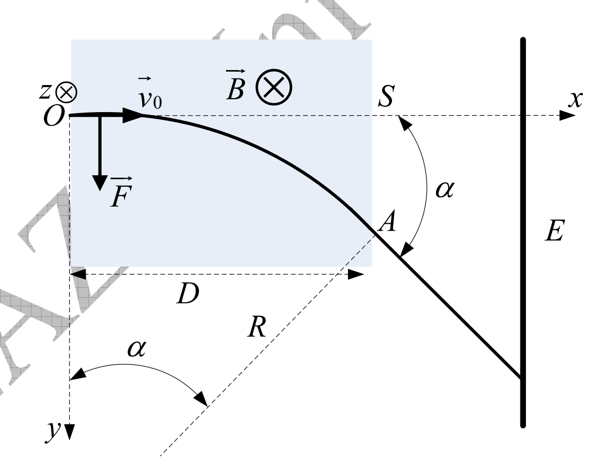
$$\alpha = \frac{\widehat{AO}}{R} \approx \frac{l}{R} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{e}{mv_0} Bl}$$

3/ le mouvement étant circulaire, la vitesse angulaire est :

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \frac{v_0}{R} \\ R &= \frac{mv_0}{eB} \end{aligned}\right| \Rightarrow \omega = \frac{eB}{m}$$

La période est égale à :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi.m}{eB}}$$



4/ Si on double la vitesse v_0 :

Seule le rayon double, tandis que la période et la vitesse angulaire restent invariables puisqu'elles sont indépendantes de la vitesse initiale.

5/ Si un faisceau d'électron pénètre avec une vitesse parallèle au champ magnétique, il ne sera soumis à aucune force, à condition de négliger son poids, de ce fait sa trajectoire reste rectiligne.

$$\left.\begin{aligned} \vec{F} &= m\vec{a} = -ev_0.\vec{u}_x \wedge B.\vec{u}_x \\ \vec{u}_x \wedge \vec{u}_x &= \vec{0} \end{aligned}\right| \Rightarrow \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{C^{te}} \Rightarrow \text{mouvement rectiligne uniforme}$$

6/ Dans ce cas, décrit dans l'énoncé, la vitesse et l'accélération ont deux composantes chacune.

$\vec{v}_{\parallel}$ et $\vec{a}_{\parallel}$: projetées sur la direction de $\vec{B}$,

$\vec{a}_\perp$ et $\vec{v}_\perp$: projetées sur le plan perpendiculaire à $\vec{B}$.

Par application de la relation fondamentale de la dynamique, on a :

$$\vec{F} = m\vec{a} = q\left(\vec{v}\wedge\vec{B}\right) \Rightarrow m\left(\vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp\right) = q\left(\vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp\right)\wedge\vec{B}$$

En développant, on remarque que le produit vectoriel $q.\vec{v}_\parallel \wedge \vec{B}$ est nul car $\vec{v}_\parallel$ et $\vec{B}$ sont parallèles, il en résulte :

$$\underbrace{m.\vec{a}_\parallel}_{\vec{0}} + m.\vec{a}_\perp = \underbrace{q.\vec{v}_\parallel \wedge \vec{B}}_{\vec{0}} + q\vec{v}_\perp \wedge \vec{B} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} m.\vec{a}_\parallel = \vec{0} \\ q.\vec{v}_\parallel \wedge \vec{B} = \vec{0} \end{array} \right.$$

Ces deux résultats nous montrent que le mouvement de la charge est la résultante d' :

- un mouvement rectiligne uniforme parallèle au champ : $m.\vec{a}_\parallel = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_\parallel = \overrightarrow{C^{te}}$
- un mouvement circulaire uniforme autour du vecteur $\vec{B}$ de rayon $R = \dfrac{m.v_\perp}{eB}$ et de vitesse angulaire $\omega = \dfrac{eB}{m}$.

La trajectoire a la forme hélicoïdale. Le rayon de l'hélice que décrit le faisceau d'électron est égale à $R = \dfrac{m.v_\perp}{eB}$.

Exercice 4.11 :

1/ Le plan $O\vec{u}_y\vec{u}_z$, parallèle à $\vec{J}_S$, est un plan de symétrie des courants, donc le champ magnétique $\vec{B}$ est perpendiculaire à ce plan, soit $\vec{B} = B\vec{u}_x$.

Par translation suivant $\vec{u}_x$, la distribution de ce courant est invariable ; de même, par translation suivant $\vec{u}_y$, la distribution de ce courant est invariable. L'intensité du champ magnétique ne dépend que de z.

La règle de la main droite, ou la règle d'ampère, donne le sens du champ magnétique : Si $z \succ 0$, alors $\vec{B}$ est dirigé suivant $\vec{u}_x$, mais si $z \prec 0$, $\vec{B}$ est dirigé vers $-\vec{u}_x$.

2/ La circulation de $\vec{B}$ sur la boucle $AEDGA$ est égale à la somme des circulations pour chaque segment (figure) :

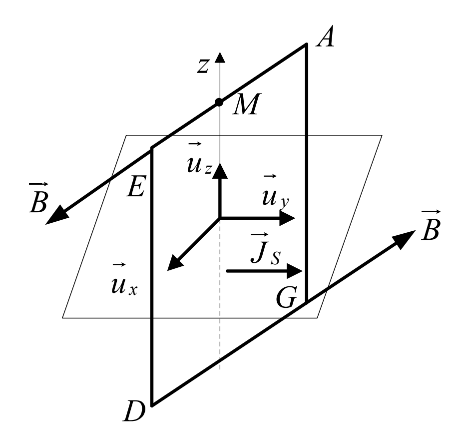
$$C = C_{AE} + C_{ED} + C_{DG} + C_{GA}$$

$C_{ED} = \int_E^D B.ED = 0$, $C_{GA} = \int_G^A B.GA = 0$ car $\vec{B}$ est perpendiculaire aux deux côtés (les deux déplacements). Sur les deux autres côtés on a $C_{AE} = C_{ED}$. La circulation totale est donc $C = C_{AE} + C_{DG}$:

$$C = \int_A^E B.AE + \int_D^G B.DG = \mu_0 I$$

$$2B.AE = \mu_0.J.AE \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{2}\mu_0.J}$$

En conclusion, on peut dire que le champ magnétique est constant de part et d'autre du plan quelque soit l'altitude du point M.



3/ A la traversée du plan, c'est-à-dire $z \to 0$, la continuité du champ magnétique s'annule à cause du changement de signe du positif au négatif.

$$\Delta\vec{B} = \vec{B}(z = 0^+) - \vec{B}(z = 0^-)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{B}(z = 0^+) = \left(\frac{1}{2}\mu_0 J.\vec{u}_x\right) \\ -\vec{B}(z = 0^-) = -\left(-\frac{1}{2}\mu_0 J.\vec{u}_x\right) \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\Delta\vec{B} = \mu_0 J.\vec{u}_x}$$

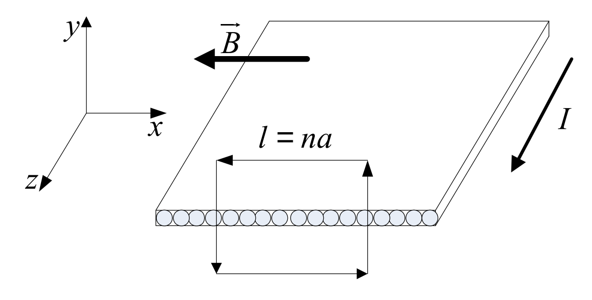
<u>Exercice 4.12</u> :

1/ a) Un segment du ruban de longueur $l = na$ est parcouru, suivant l'axe Ox, par un courant d'intensité nI. On en déduit la densité du courant électrique :

$$\vec{J} = \frac{\text{intensité du courant}}{\text{longueur du conducteur}} = \frac{I}{a}\vec{u}_z$$

b) D'après la règle de la main droite, le champ magnétique créé, et en raison de la symétrie du problème, a une seule composante suivant l'axe Ox mais de sens contraire, c'est-à-dire $\vec{B} = -\vec{B}_x$.

Soit le contour carré indiqué sur la figure suivante :



La circulation C de $\vec{B}$ sur les deux côtés parallèles à l'axe Oz est nulle, car $\vec{B}$ est perpendiculaire à chacun d'eux, et la circulation sur les deux côtés parallèles à l'axe Ox ne fait intervenir que la composante $\vec{B}_x$. d'après la règle d'Ampère, on a :

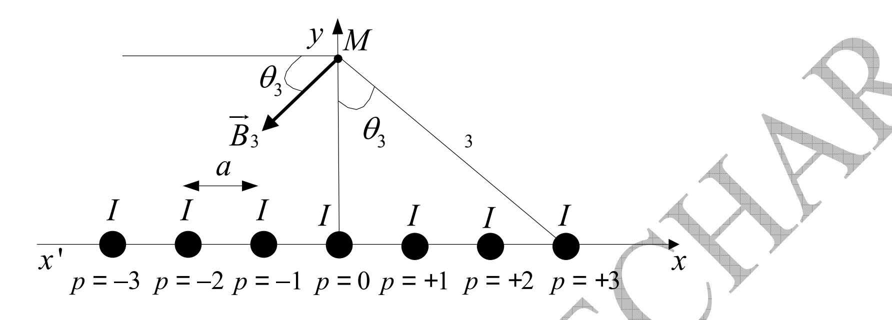
$$C = \sum B\Delta l = \mu_0 \underbrace{\sum I}_{Jl} \Rightarrow C = Bl + Bl = \mu_0.Jl \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{2}\mu_0.J}$$

c) Le champ magnétique produit par ce courant dans le cas cité est :

$$\boxed{\vec{B}_0(M) = -\frac{\mu_0 I}{2a}\vec{u}_x}$$

Le signe – provient du fait que $\vec{B}_0(M)$, et d'après la règle de la main droite, est situé sur l'axe Ox mais de sens contraire.

2/ le plan $x=0$, qui contient M, est un plan de symétrie pour les courants ; la seule composante qui s'annule est B_x. Voir figure suivante :



Les fils p et $-p$, situés à la distance $r_p = \sqrt{p^2a^2 + y^2}$ de M, produisent chacun d'eux un champ, telles que les composantes $\vec{B}_{py}$ sont directement opposées, donc elles s'annulent, et les composantes $\vec{B}_{px}$ sont :

$$\vec{B}_{px} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_p}\left(-\cos\theta_p\right)\vec{u}_x \; ; \; B_{px} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_p}\left(-\cos\theta_p\right) \Rightarrow \boxed{B_{px} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r_p}\frac{y}{r_p}}$$

Le champ total est la somme de toutes les composantes $\vec{B}_{px}$, d'où :

$$\vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\sum_p \frac{y}{r_p^2}\vec{u}_x = -\frac{\mu_0 I y}{2\pi}\sum_p \frac{1}{r_p^2}\vec{u}_x \Rightarrow \vec{B} = \vec{B}_0(M)\, f(y)$$

La fonction $f(y)$ doit être égale à :

$$-\frac{\mu_0 I y}{2\pi}\sum_p \frac{1}{r_p^2} = \underbrace{-\frac{\mu_0 I}{2a}}_{B_0(M)} f(y) \Rightarrow f(y) = \frac{a.y}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{p^2a^2 + y^2}$$

$$\boxed{f(y) = \frac{a}{y.\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{p^2\dfrac{a^2}{y^2} + 1}}$$

3/ Dans ce cas, le champ reste toujours dirigé suivant Ox. Par des calculs semblables à peu près aux précédents, on obtient :

$$r_p = \sqrt{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 a^2 + y^2}$$

$$\vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\sum_p \frac{y}{r_p^2}\vec{u}_x = -\frac{\mu_0 I y}{2\pi}\sum_p \frac{1}{r_p^2}\vec{u}_x \Rightarrow \vec{B} = \vec{B}_0(M)\, f(y)$$

La fonction doit être égale à :

$$-\frac{\mu_0 I y}{2\pi}\sum_p \frac{1}{r_p^2} = -\frac{\mu_0 I}{2a} f(y) \Rightarrow f(y) = \frac{a.y}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2 a^2 + y^2}$$

$$\boxed{f(y) = \frac{a}{y.\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2 \frac{a^2}{y^2} + 1}}$$

Exercice 4.13 :

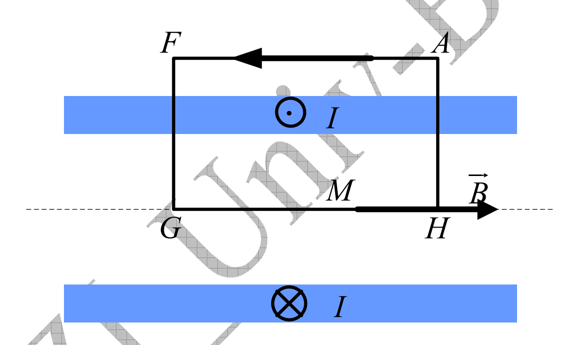
1/ le champ magnétique du solénoïde est parallèle à l'axe de la bobine. Il reste invariable pour une translation suivant $z'z$, ou par rotation autour de cet axe.

On choisit le contour $AFGHA$ afin d'appliquer le théorème d'Ampère.

Suivant le trajet AF : le champ est nul car il est à l'extérieur du solénoïde (d'après l'énoncé).

Suivant les trajets FG et AH : le vecteur champ est perpendiculaire aux deux trajets : la circulation du champ est nulle.

$$GH = L \quad : C = \int_G^H \vec{B}(r)\vec{dl} \Rightarrow C = B(r)L$$



Intensité des courants entrelacés :

La longueur L comprend NL spires. Dans l'épaisseur $R_2 - R_1$ se trouvent $N(R_2 - R_1)$ spires. Donc, l'intensité du courant qui parcourt cet ensemble de spires entrelacées est :

$$NL.N(R_2 - R_1) = N^2(R_2 - R_1)L.I$$

On applique le théorème d'Ampère :

$$C = B(r)L = \mu_0 N^2 (R_2 - R_1)L.I$$

Finalement l'intensité du champ magnétique en un point de l'axe est égale à :

$$\boxed{B(r) = \mu_0 N^2 (R_2 - R_1).I}$$

2/ Un contour semblable au précédent, passant par P quelque soit sa position à l'intérieur du solénoïde conduit au même résultat : le champ est uniforme dans le solénoïde.

3/ On suit les mêmes étapes que précédemment, quand le point M est dans les enroulements à une distance de l'axe. Il suffit de remplacer R_1 par pour trouver :

$$\boxed{B(r) = \mu_0 N^2 (R_2 - r).I}$$

4/ Le flux à travers une section droite du solénoïde nécessite la somme de deux flux :

- Le flux à l'intérieur du solénoïde et qui est égal à :

$$\left.\begin{array}{l}\Phi_i = SB \\ S = \pi R_1^2\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\Phi_i = \pi R_1^2 \mu_0 N^2 \left(R_2 - R_1\right).I}$$

- Le flux à travers les enroulements et pour lequel on choisit une couronne de rayon et d'épaisseur d , telle que sa surface élémentaire soit $dS = 2\pi r dr$. On intègre l'expression que nous avons trouvée dans 3/, de R_1 à R_2 . on obtient :

$$\Phi_2 = \int_{R_1}^{R_2} \mu_0 N^2 \left(R_2 - r\right) I.2\pi r dr \Rightarrow \Phi_2 = \mu_0 \pi N^2 I\left(\frac{1}{3}R_2^3 - R_2 R_1^2 + \frac{2}{3}R_1^3\right)$$

Le flux total est donc :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 \Rightarrow \boxed{\Phi = \frac{1}{3}\pi\mu_0 N^2 I\left(R_2^3 - R_1^3\right)}$$

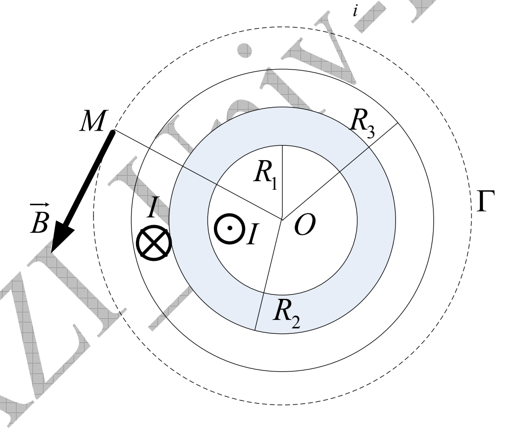
<u>Exercice 4.14</u> :

Le champ est radial et ne dépend que de la distance qui est le rayon du cercle (voir figure).

La circulation du champ magnétique sur toute la courbe Γ circulaire de rayon est:

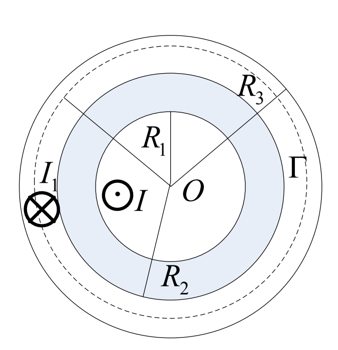
$$C = \oint_\Gamma \vec{B}\left(r\right)\vec{dl} \Rightarrow C = 2\pi r B\left(r\right)$$

On applique le théorème d'Ampère : $2\pi r B\left(r\right) = \mu_0 \sum_i I_i$



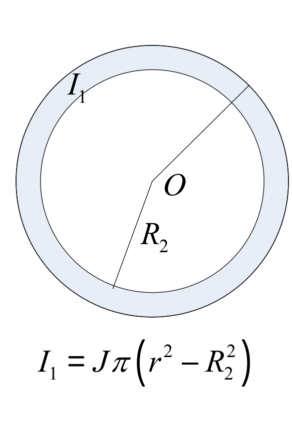
<u>Le point M est hors du câble</u> $\left(r \succ R_3\right)$: l'intensité du courant entrant est égale à l'intensité du courant sortant, la somme est donc nulle, d'où $\mu_0 \sum_i I_i = 0 \Rightarrow B\left(r\right) = 0$.

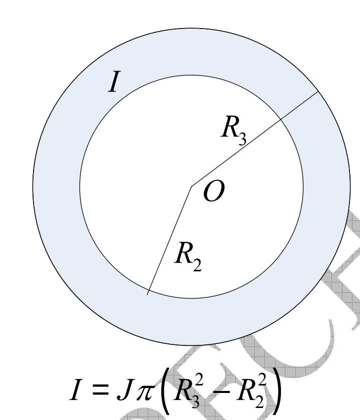
<u>Le point M est entre les deux conducteurs</u> $R_2 \prec r \prec R_3$:



L'intensité du courant entrant et traversant le contour Γ est I. On détermine l'expression de l'intensité I_1 du courant sortant, c'est-à-dire le courant qui revient en traversant le contour Γ ; autrement dit le courant passant dans l'espace compris entre R_2 et $(r \succ R_2)$.

$$\left.\begin{array}{l} I_1 = J\pi\left(r^2 - R_2^2\right) \\ I = J\pi\left(R_3^2 - R_2^2\right) \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{I_1 = I\frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}}$$





$I_1 = J\pi\left(r^2 - R_2^2\right)$ $I = J\pi\left(R_3^2 - R_2^2\right)$

En appliquant le théorème d'Ampère, on trouve :

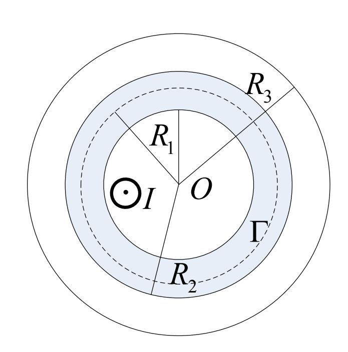
$$2\pi r B(r) = \mu_0 \sum_i I_i = \mu_0\left(I - I_1\right)$$

$$\boxed{B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}}$$

Discussion :

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} \rightarrow \left| \begin{array}{l} r \rightarrow R_3 : B(r) \rightarrow 0 \\ r \rightarrow R_2 : B(r) \rightarrow \dfrac{\mu_0 I}{2\pi} \end{array}\right.$$

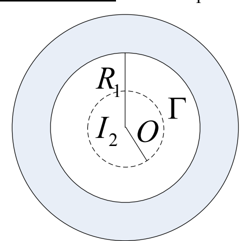
Le point M à l'intérieur de l'isolant $(R_1 \prec r \prec R_2)$**:** Dans ce cas, le courant entrant est le seul qui passe à travers le contour Γ.



$$2\pi r B(r) = \mu_0 I \Rightarrow \boxed{B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

$$r \rightarrow R_2 : B(r) \rightarrow \frac{\mu_0 I}{2\pi R_2}$$

Le point M à l'intérieur du conducteur $r \prec R_1$ **:**



L'intensité du courant entrant qui traverse le contour Γ à l'intérieur de la région comprise entre R_1 et $(r \prec R_1)$ est égale à :

$$\left.\begin{array}{l} I_2 = J\pi r^2 \\ I = J\pi R_1^2 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{I_2 = I\frac{r^2}{R_2^2}}$$

On applique le théorème d'Ampère pour obtenir :

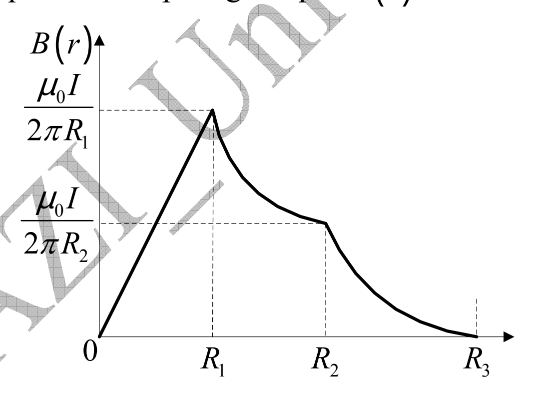
$$2\pi r B(r) = \mu_0 I_2$$

$$\boxed{B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{r}{R_1^2}}$$

$$r \to R_1 : B(r) \to \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1}$$

Suite aux résultats obtenus dans les deux questions précédentes, le champ est continu sur toutes les surfaces qui séparent les différentes composantes du câble.

4/ Représentation graphique du champ magnétique $B(r)$ en fonction de la distance :



Exercice 4.15 :

1/ Les équations différentielles régissant le mouvement du système.

Pour étudier le mouvement de la particule, on choisit le repère galiléen $\Re\left(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z\right)$. La particule est soumise à son poids (qu'on néglige) et la force de Lorentz. La deuxième loi de Newton nous permet d'écrire :

$$\vec{F} = m\vec{a} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B}\right) \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\left(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B}\right)$$

On dispose des grandeurs vectorielles suivantes :

$$\vec{a}\begin{cases}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{cases} \ , \quad \vec{v}\begin{cases}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{cases} \ , \quad \vec{B}\begin{cases}0\\ 0\\ B\end{cases} \ , \quad \vec{E}\begin{cases}0\\ E\\ 0\end{cases}$$

L'accélération s'écrit alors :

$$\vec{a}\begin{cases}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{cases}=\frac{q}{m}\left[\vec{E}\begin{cases}0\\ E\\ 0\end{cases}+\vec{v}\begin{cases}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{cases}\wedge\vec{B}\begin{cases}0\\ 0\\ B\end{cases}\right]\Rightarrow\begin{cases}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{q}{m}B\dot{y}\\ \dfrac{q}{m}E-\dfrac{q}{m}B\dot{x}\\ 0\end{cases}$$

On posant $\omega=\frac{q}{m}B$, on obtient un système d'équations différentielles qui régissent le mouvement de la particule :

$$\boxed{\begin{cases}\ddot{x}=\omega\dot{y}\rightarrow(1)\\ \ddot{y}=\dfrac{q}{m}E-\omega\dot{x}\rightarrow(2)\\ \ddot{z}=0\rightarrow(3)\end{cases}}$$

2/ Les équations horaires de la trajectoires .

Vu les conditions initiales, l'équation (3) conduit à $\boxed{z=0}$.

Le mouvement s'effectue donc dan le plan xOy . L'intégration de l'équation (1) donne :

$$\dot{x}=\omega y+\dot{x}(0)$$

Puisque la composante initiale de la vitesse est nulle $(x(0)=0)$, on obtient : $\dot{x}=\omega y$

En reportant ce dernier résultat dans l'équation (2), on obtient l'équation différentielle suivante : $\ddot{y}+\omega^2 y=\frac{q}{m}E$

La solution de cette équation est :

$$y=\frac{q}{m\omega^2}E+C\cos\omega t+D\sin\omega t=\frac{q}{m\omega.\omega}E+C\cos\omega t+D\sin\omega t$$

Puisque :

$$\omega=\frac{q}{m}B\Rightarrow B=\frac{m\omega}{q}$$

On a donc :

$$\frac{q}{m\omega.\omega}E=\frac{E}{B\omega}=A$$

Dès lors, on peut écrire la solution de l'équation différentielle précédente sous la forme :

$$y=A+C\cos\omega t+D\sin\omega t$$

C et D sont les constantes d'intégration que nous devons déduire à partir des conditions initiales. En effet :

$$y(0)=A+C=0\Rightarrow C=-A$$

$$\dot{y}(0)=D\omega=0\Rightarrow D=0$$

Finalement, on obtient :

$$\boxed{y=A(1-\cos\omega t)}$$

Et puisque $\dot{x} = \omega y$, on arrive à $\dot{x} = A\omega\left(1 - \cos\omega t\right)$

L'intégration de cette dernière équation, en prenant en compte les conditions initiales $x\left(0\right) = 0$, nous donne :

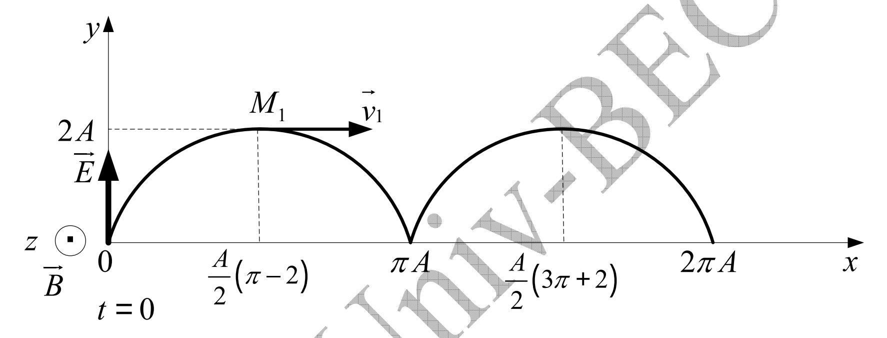
$$\boxed{x = A\left(\omega t - \sin\omega t\right)}$$

3/ Forme de la trajectoire.

On dresse le tableau suivant :

ωt	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2
x	0	$A/2\left(\pi-2\right)$	πA	$A/2\left(3\pi-2\right)$	$2\pi A$
y	0	A	$2A$	A	0

Vu la périodicité des deux fonctions utilisées, on se contente dans notre étude de l'intervalle que nous avons défini.



4/ L'intensité de la vitesse est :

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = A\omega\left[2\left(1 - \cos\omega t\right)\right]^{1/2} = 2A\omega\sin\frac{\omega t}{2}$$

A l'instant $t = \dfrac{\pi}{\omega}$, la vitesse est égale à :

$$\boxed{v = 2A\omega = 2\frac{E}{B}}$$

5/ Utilisation du théorème de l'énergie cinétique.

On applique le théorème de l'énergie cinétique $\left(\Delta E_c = \sum W_i\right)$ entre les instants 0 et $t = \dfrac{\pi}{\omega}$:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \int_0^{M_1} q\left(\vec{B} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)d\vec{l} = \int_0^{M_1} q\vec{E}d\vec{l} = \int_0^{M_1} qEdy$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = qE2A$$

D'où :

$$\left.\begin{array}{l} A=\dfrac{E}{B\omega} \\ \omega=\dfrac{qB}{m} \end{array}\right| \Rightarrow v^2=4\left(\frac{q}{m}\right)E\left(\frac{Em}{BqB}\right)=4\frac{E^2}{B^2} \Rightarrow \boxed{v=2\frac{E}{B}}$$

Exercice 4.16 :

1/ La position M_Ω.

On étudie le mouvement de la particule dans le repère terrestre supposé galiléen. La particule est soumise à trois forces : son poids (négligeable), la force magnétique et la force de frottement. Le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire :

$$\vec{F}=m\vec{a}=-\lambda\vec{v}+q\vec{v}\wedge\vec{B}$$

On a les grandeurs vectorielles suivantes :

$$\vec{a}\begin{cases}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{cases} \quad , \quad \vec{v}\begin{cases}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{cases} \quad , \quad \vec{B}\begin{cases}0\\ 0\\ B\end{cases}$$

Ecrivons à présent l'accélération du mouvement :

$$\begin{cases}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{cases}=-\frac{\lambda}{m}\begin{cases}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{cases}+\frac{q}{m}\begin{cases}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{cases}\wedge\begin{cases}0\\ 0\\ B\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{cases}=\begin{cases}-\dfrac{\lambda}{m}\dot{x}+\dfrac{q}{m}B\dot{y}\\ -\dfrac{\lambda}{m}\dot{y}-\dfrac{q}{m}B\dot{x}\\ -\dfrac{\lambda}{m}z\end{cases}$$

En introduisant ω et τ, on obtient un système d'équations différentielles qui régissent le mouvement de la particule :

$$\ddot{x}=-\frac{\dot{x}}{\tau}+\omega\dot{y}$$

$$\ddot{y}=-\frac{\dot{y}}{\tau}-\omega\dot{x}$$

$$\ddot{z}=-\frac{z}{\tau}$$

En intégrant les trois équations on obtient :

$$\dot{x}=-\frac{x}{\tau}+\omega y+v_0$$

$$\dot{y}=-\frac{y}{\tau}-\omega x$$

$$\dot{z}=-\frac{z}{\tau}$$

La solution de la dernière équation différentielle, en tenant compte des conditions initiales, et puisque le mouvement s'effectue dans le plan xOy, est :

$$\dot{z}+\frac{1}{\tau}z=0 \Rightarrow \boxed{z=K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)=0}$$

La force magnétique est perpendiculaire au plan de la trajectoire de la particule, son travail est donc nul. La force de frottement est la seule qui a un travail qui est résistant donc négatif. L'énergie cinétique de la particule décroît et sa vitesse tend vers zéro. On a donc :

$$t \to \infty \Rightarrow \begin{vmatrix} \dot{x}_\infty = 0 \\ \dot{y}_\infty = 0 \end{vmatrix}$$

On obtient :

$$\dot{x}_\infty = -\frac{x_\infty}{\tau} + \omega y_\infty + v_0 = 0$$

$$\dot{y}_\infty = -\frac{y_\infty}{\tau} - \omega x_\infty = 0$$

Finalement on a :

$$\begin{cases} -\dfrac{x_\infty}{\tau} + \omega y_\infty + v_0 = 0 \\ -\dfrac{y_\infty}{\tau} - \omega x_\infty = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM}_\Omega \begin{vmatrix} x_\infty = \dfrac{\tau v_0}{1+\omega^2\tau^2} \\ y_\infty = \dfrac{-\tau^2 \omega v_0}{1+\omega^2\tau^2} \\ z_\infty = 0 \end{vmatrix}$$

2/ L'équation polaire.

En coordonnées polaires :

$$\vec{r} = \overrightarrow{M_\Omega M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_\Omega} = r\vec{u}_r$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} - \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OM_\Omega}}{dt}}_{0(t\to\infty)} = \frac{d\overrightarrow{M_\Omega M}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \to (1)$$

Au début de cette solution, on a écrit la relation fondamentale de la dynamique :

$$m\vec{a} = -\lambda\vec{v} + q\vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{\lambda}{m}\vec{v} + \frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{a} = -\frac{\lambda}{m}\vec{v} + \frac{q}{m}\vec{v} \wedge B\vec{u}_z = -\frac{\lambda}{m}\vec{v} + \frac{q}{m}B\vec{v} \wedge \vec{u}_z$$

L'intégration de la dernière expression nous donne :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = -\frac{\lambda}{m}\overrightarrow{OM} + \frac{q}{m}B\left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}_z\right) + \vec{v}_0$$

$$\vec{v} = -\frac{1}{\tau}\overrightarrow{OM} + \omega\left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}_z\right) + \vec{v}_0 \to (2)$$

Quand $t \to \infty$, cette dernière équation s'écrit :

$$\vec{0} = -\frac{1}{\tau}\overrightarrow{OM}_\Omega + \omega\left(\overrightarrow{OM}_\Omega \wedge \vec{u}_z\right) + \vec{v}_0 \to (3)$$

En soustrayant l'équations (2) de (3) membre à membre, on obtient:

$$\vec{v} = -\frac{1}{\tau}\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_\Omega}\right) + \omega\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_\Omega}\right) \wedge \vec{u}_z$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{\vec{r}}{\tau} + \omega\vec{r} \wedge \vec{u}_z$$

Par la suite on obtient :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{1}{\tau}\vec{r} + \omega\vec{r} \wedge \vec{u}_z \Leftrightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{r}{\tau}\vec{u}_r + \omega r \underbrace{\vec{u}_r \wedge \vec{u}_z}_{\vec{u}_\theta}$$

$$\vec{v} = -\frac{r}{\tau}\vec{u}_r + \omega r\vec{u}_\theta \rightarrow (4)$$

Par identification des équations (1) et (4), membre à membre, on arrive à :

$$\begin{cases} \dot{r} = -\frac{}{\tau} \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}$$

Après intégration on obtient :

$$\begin{cases} r = K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \\ \theta = \omega t \end{cases}$$

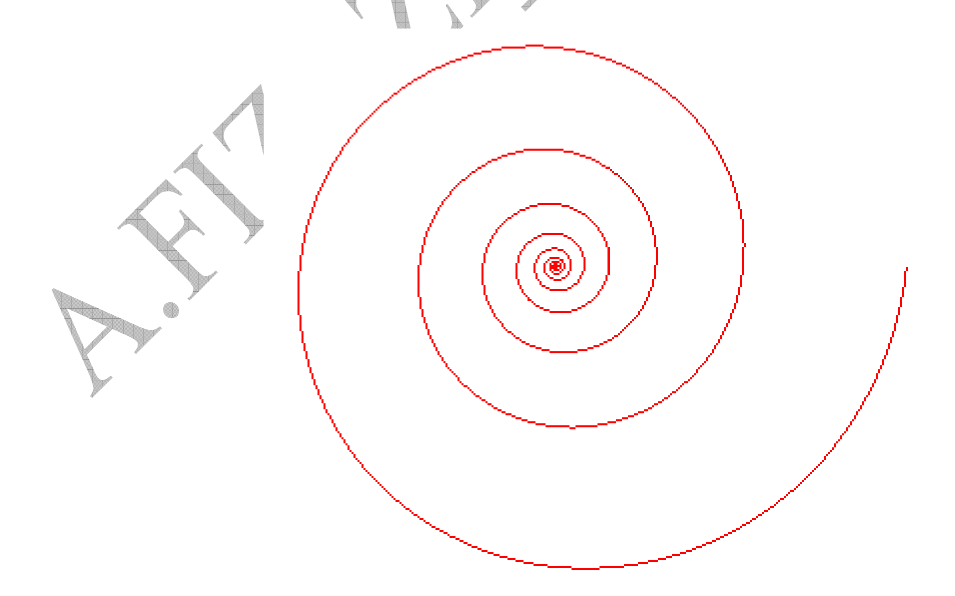
Pour déterminer K, on sait qu'au temps $t = 0$, la particule se trouve à l'origine du repère. Cette origine se trouve à l'infini de la position M_Ω. Autrement dit, par rapport au point M_Ω de coordonnées (x_∞, y_∞), les coordonnées de l'origine du repère sont $(-x_\infty, -y_\infty)$. Nous avons donc :

$$r(t=0) = \sqrt{x_\infty^2 + y_\infty^2} = \frac{v_0\tau}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} = K$$

A la fin, on obtient :

$$\boxed{r = \frac{v_0\tau}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\exp\left(-\frac{\theta}{\omega\tau}\right)}$$

Ce résultat représente l'équation polaire d'une spirale logarithmique.



Exercice 4.17 :

1/ La force électromotrice d'induction à l'intérieur de la bobine est $e(t) = -\dfrac{d\Phi(t)}{dt}$, le flux total du champ magnétique à travers la bobine est $\Phi(t) = NSB(t)$, où N représente le nombre de spires, et S l'aire de la bobine. Donc :

$$e(t) = -NS\frac{dB(t)}{dt} \to \frac{dB(t)}{dt} = -\frac{e(t)}{NS} \Rightarrow B(t) = -25\int e(t)\,dt$$

Pour $t \leq 0$, $e_0 = 0$ et $B_0 = 0$, donc $B(t) = 0$

Pour $0 \prec t \prec 4ms : B(t) = -25e\int_0^t dt = -25(+3)\int_0^t dt \Rightarrow \boxed{B(t) = -75t}$

A l'instant $t = 4ms$, $\boxed{B(4.10^{-3}s) = -0,3T}$

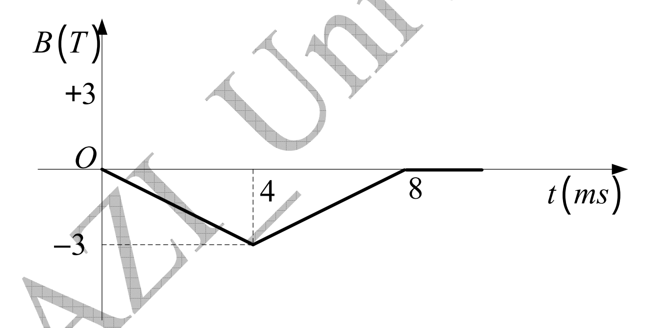
Pour $4 \prec t \prec 8ms$:

$$B(t) - B(4.10^{-3}s) = -25e\int_{4.10^{-3}}^{t} dt = -25(-3)\int_{4.10^{-3}}^{t} dt \Rightarrow B(t) - B(4.10^{-3}s) = 75t - 0,3$$

A la fin, l'expression du champ magnétique instantané est : $\boxed{B(t) = 75t - 0,6}$

Pour $t \succ 8ms$: $e = 0$ et $B(8.10^{3}) = 0$, d'où $B(t) = 0$

2/ La figure suivante représente les variations du champ magnétique en fonction du temps.



Exercice 4.18 :

Le champ magnétique B produit par un solénoïde parcouru par un courant électrique I est égale à :

$$B = \mu_0 n_1 I$$

Le flux qui traverse la bobine est égal à :

$$\Phi = N_2 B S_2 \cos\theta$$

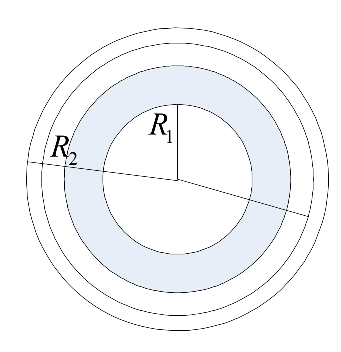
Après remplacement de B , on obtient :

$$\left.\begin{array}{l}\Phi = N_2 S_2 \mu_0 n_1 \cos\theta I \\ \Phi = LI\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{L = N_2 S_2 \mu_0 n_1 \cos\theta}$$

Exercice 4.19 :

On suppose que le conducteur interne soit parcouru par le courant I_0, dirigé vers l'avant ; et le conducteur externe soit parcouru par le courant I_0 dirigé vers l'arrière.

Le champ magnétique produit en un point situé à la distance de l'axe est, d'après la règle d'Ampère, égal à :



$$B.2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}$$

I est égal à la somme des courants dans la spire de rayon .

On obtient le flux à travers une section droite de largeur d et de hauteur h, de la façon suivante :

$$d\Phi = BdS = Bhdr = \mu_0 Ih\frac{dr}{2\pi r} \Rightarrow \Phi = \frac{\mu_0 Ih}{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}$$

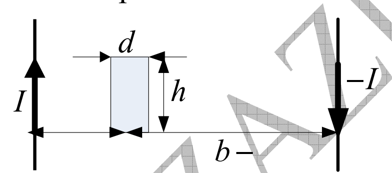
$$\Phi = \frac{\mu_0 Ih}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

On sait que le flux est proportionnel à l'induction propre $\Phi = LI$. Par identification des deux expressions du flux obtenues, on arrive à l'expression de l'induction propre du câble :

$$\boxed{L = \frac{\mu_0 h}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

<u>Exercice 4.20</u> :

Le champ magnétique produit par les deux conducteurs rectilignes en un point, situé à la distance du premier et à la distance $b-$ du second, est égal à :



$$B = \mu_0\frac{I}{2\pi r} + \mu_0\frac{I}{2\pi(b-r)}$$

Le flux élémentaire de ce champ à travers un ruban d'épaisseur d et de hauteur h, parallèle au conducteur est :

$$d\Phi = BS = Bhdr \Rightarrow d\Phi = \mu_0\frac{hI}{2\pi}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{b-r}\right)dr$$

Pour obtenir le flux complet, on doit intégrer de a à $b-a$:

$$\Phi = \mu_0\frac{hI}{2\pi}\int_a^{b-a}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{b-r}\right)dr \Rightarrow \Phi = \mu_0\frac{hI}{2\pi}\left[\ln r\Big|_a^{b-a} - \ln(b-r)\Big|_a^{b-a}\right]$$

$$\boxed{\Phi = \mu_0\frac{hI}{\pi}\ln\frac{b-a}{a}}$$

Dans le cas général, le flux d'un champ magnétique à travers une surface donnée est $\Phi = LI$, tel que L représente le coefficient d'induction. Par identification, on obtient l'induction propre de ce système qui est égal à :

$$L = \mu_0 \frac{h}{\pi} \ln \frac{b-a}{a}$$